TRAVAUX RURAUX DE STRASBOURG 1983
MATHEMATIQUES APPLIQUEES (1 h) Commune aux deux options

Dans chaque question les candidats devront calculer les valeurs exactes puis des valeurs approchées (5 décimales).

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé on considère la courbe (Γ) décrite par le point M de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 1 \\ y = t(3t^2 - 1) \end{cases}$$

lorsque le paramètre t varie de $-\infty$ à $+\infty$. L'aspect de cette courbe apparait sur la figure.

1. a) Calculer la longueur de la boucle après avoir vérifié qu'elle correspond à l'intervalle $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

   b) Calculer la valeur t_0 de t, supérieure à $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pour laquelle la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OM}$ est égale à deux fois la longueur de la boucle puis les coordonnées du point M_0 ainsi déterminé.

   Indications :

   t_0 apparaitra comme la seule racine réelle d'une équation de la forme :

   $$t^3 + at + b = 0$$

   Sa détermination exacte sera facilitée par le renseignement suivant : le réel $t_0\sqrt{3}$ est un nombre entier.

2. On considère sur (Γ) les trois points :

   A, d'ordonnée positive, où la tangente a pour pente 0

   B, d'abscisse positive, où la tangente a pour pente $+\sqrt{3}$

   C, d'abscisse négative, où la tangente a pour pente $-\sqrt{3}$.

   Calculer leurs coordonnées. Montrer qu'ils sont alignés (par exemple en comparant les pentes des droites AB et AC), enfin calculer l'abscisse du point I où la droite qui les porte coupe l'axe x'Ox.

3. Soit D le point de (Γ) qui correspond à t = 1. La droite ID recoupe (Γ) en deux autres points, E d'ordonnée positive, F d'ordonnée négative. Calculer :

   - Les valeurs t_1 et t_2 du paramètre qui correspondent à ces deux points.
   - Les pentes des tangentes à la courbe aux points D, E, F.
   - Les angles du triangle déterminé par ces trois tangentes (unité : le degré). En déduire la nature du triangle.